ECOLE SUPERIEURE D'INGENIEURS DE MARSEILLE

CONCOURS 1979

## OPTION M

# ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 4 heures

*Les candidats ne doivent pas rédiger les démonstrations des résultats énoncés dans le préambule.*

### PRÉAMBULE

On définit deux lois de composition internes, une addition et une multiplication, dans l'ensemble $R^2$ des couples $(x, y)$ de nombres réels par :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad (x, y)(x', y') = (xx', xy' + yx').$$

$R^2$, muni de ces deux lois, est un anneau D commutatif ayant pour élément unité $(1, 0) = 1_D$ ; l'ensemble des couples $(x, 0)$, $x$ parcourant R, est un sous-anneau de D, isomorphe au corps R; on identifie ce sous-anneau à R et on pose désormais $(x, 0) = x$ pour tout $x$ réel. Tout élément $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ de D est appelé nombre dual et s'écrira $x + y\varepsilon$, en posant $\varepsilon = (0, 1)$.

### PARTIE I

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ étant un repère orthonormal d'un plan affine euclidien P, on associe à tout nombre dual $z = x + y\varepsilon$ le point M $(z)$ de P défini par $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ; M $(z)$ s'appellera image de $z$.

1° Quels sont les éléments inversibles de D ? Préciser l'inverse d'un élément inversible.

2° Soit P' l'ensemble des images M $(z)$ des nombres duals $z$ inversibles. Montrer que l'application : $M(z) \longmapsto M\left(\frac{1}{z}\right)$ est une bijection T de P' sur lui-même.

Étudier l'image par T de l'intersection d'une droite quelconque avec P'.

.../...

3° Étudier le problème des racines carrées d'un nombre dual.

4° Soit $f$ l'application de P dans P qui à M $(z)$ associe M $(z^2)$.

*a.* Étudier l'image réciproque par $f$ d'une droite quelconque du plan.

*b.* Étudier l'image par $f$ d'une droite quelconque du plan.

*c.* Quelle est l'image par $f$ d'un cercle centré à l'origine? Tracer sur une même figure le cercle de centre O et de rayon 1 et son image par $f$. Quelle est l'image par $f$ d'une conique $\Gamma$ centrée à l'origine? Discuter suivant la nature de $\Gamma$.

N. B. — Les questions 2° et 4° exigent des réponses géométriques détaillées : les examinateurs ne se contenteront pas d'équations cartésiennes ou d'autres représentations analytiques sans commentaires.

## Partie II

A. Soit $\vec{E}$ un R-espace vectoriel dont les éléments sont notés $\vec{U}$, $\vec{V}$, ... On sait, et les candidats n'ont pas à le démontrer, que $\vec{E} \times \vec{E}$ muni de l'addition définie par $(\vec{U}, \vec{V}) + (\vec{U}_1, \vec{V}_1) = (\vec{U} + \vec{U}_1, \vec{V} + \vec{V}_1)$ est un groupe abélien qu'on notera G et que la partie de G décrite par les éléments de la forme $(\vec{U}, \vec{O})$ est un sous-groupe de G, isomorphe à $(\vec{E}, +)$.

1° On définit une application de D × G dans G (loi d'action de D sur G) par :

$$z(\vec{U}, \vec{V}) = (x\vec{U}, x\vec{V} + y\vec{U}) \quad \text{(avec } z = x + y\varepsilon \text{ et } (x, y) \in \mathrm{R}^2\text{)}.$$

Démontrer que :

*a.* $(\forall (z, z_1, \mathrm{X}) \in \mathrm{D} \times \mathrm{D} \times \mathrm{G}) \quad (z(z_1 \mathrm{X}) = (z z_1)\mathrm{X})$

*b.* $(\forall (z, z_1, \mathrm{X}) \in \mathrm{D} \times \mathrm{D} \times \mathrm{G}) \quad ((z + z_1)\mathrm{X} = z\mathrm{X} + z_1\mathrm{X})$

*c.* $(\forall (z, \mathrm{X}, \mathrm{X}_1) \in \mathrm{D} \times \mathrm{G} \times \mathrm{G}) \quad (z(\mathrm{X} + \mathrm{X}_1) = z\mathrm{X} + z\mathrm{X}_1)$

*d.* $(\forall \mathrm{X} \in \mathrm{G}) \quad (1_{\mathrm{D}}.\mathrm{X} = \mathrm{X})$

2° Tout élément de G de la forme $(\vec{U}, \vec{O})$ étant désormais noté $\vec{U}$, montrer que tout élément $(\vec{U}, \vec{V})$ de G peut s'écrire sous la forme $(\vec{U}, \vec{V}) = \vec{U} + \varepsilon\vec{V}$. Les éléments de G seront appelés vecteurs duals, $\vec{U}$ et $\vec{V}$ seront appelés composantes vectorielles du vecteur dual $\vec{U} + \varepsilon\vec{V}$.



B. Aux hypothèses de A on ajoute, *pour tout le reste du problème*, les suivantes : $\vec{E}$ est un R-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, les produits scalaire et vectoriel de deux éléments de $\vec{E}$ étant respectivement notés $\vec{U}_1 . \vec{U}_2$ et $\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2$ ; $\|\vec{U}\|$ désignera la norme euclidienne de $\vec{U}$.

1° On définit une application de G × G dans D, dite multiplication scalaire duale, par : $(\vec{U}_1 + \varepsilon\vec{V}_1).(\vec{U}_2 + \varepsilon\vec{V}_2) = \vec{U}_1 . \vec{U}_2 + \varepsilon(\vec{U}_1 . \vec{V}_2 + \vec{V}_1 . \vec{U}_2)$ et une application de G × G dans G, dite multiplication vectorielle duale par :

$$(\vec{U}_1 + \varepsilon\vec{V}_1) \wedge (\vec{U}_2 + \varepsilon\vec{V}_2) = \vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 + \varepsilon(\vec{U}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{U}_2).$$

D'autre part on appellera module du vecteur dual $\vec{U} + \varepsilon\vec{V}$ le nombre dual noté

$$|\vec{U} + \varepsilon\vec{V}| \text{ et défini par } \begin{cases} |\vec{U} + \varepsilon\vec{V}| = \|\vec{U}\| + \varepsilon\dfrac{\vec{U}.\vec{V}}{\|\vec{U}\|} & \text{si } \vec{U} \neq 0 \\ |\varepsilon\vec{V}| = 0 \end{cases}$$

*a.* Démontrer que

$$(\forall (z, z_1, \mathrm{X}, \mathrm{X}_1) \in \mathrm{D} \times \mathrm{D} \times \mathrm{G} \times \mathrm{G}) \begin{cases} (z\mathrm{X}).(z_1\mathrm{X}_1) = (zz_1)(\mathrm{X}.\mathrm{X}_1) \\ (z\mathrm{X}) \wedge (z_1\mathrm{X}_1) = (zz_1)(\mathrm{X} \wedge \mathrm{X}_1) \end{cases}$$

et que

$$(\forall (\mathrm{X}, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) \in \mathrm{G} \times \mathrm{G} \times \mathrm{G}) \begin{cases} \mathrm{X}.(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2) = \mathrm{X}.\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}.\mathrm{X}_2 \\ \mathrm{X} \wedge (\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2) = \mathrm{X} \wedge \mathrm{X}_1 + \mathrm{X} \wedge \mathrm{X}_2 \end{cases}$$

*b.* Exprimer, à l'aide des composantes vectorielles de trois vecteurs duals $\mathrm{X}, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2$ leur produit mixte $(\mathrm{X}, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = (\mathrm{X} \wedge \mathrm{X}_1).\mathrm{X}_2$ et leur double produit vectoriel $(\mathrm{X} \wedge \mathrm{X}_1) \wedge \mathrm{X}_2$. Démontrer qu'il existe deux nombres duals $\lambda$ et $\mu$ tels que $(\mathrm{X} \wedge \mathrm{X}_1) \wedge \mathrm{X}_2 = \lambda\mathrm{X} + \mu\mathrm{X}_1$ ; préciser les valeurs de $\lambda$ et $\mu$ en fonction de $\mathrm{X}, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2$.

2° E étant un espace affine de dimension 3 dirigé par $\vec{E}$, on associe à tout torseur $\mathfrak{T}$ et à tout point M de E le vecteur dual $\mathrm{T}_{\mathrm{M}} = \vec{S} + \varepsilon\vec{G}_{\mathrm{M}}$, $\vec{S}$ et $\vec{G}_{\mathrm{M}}$ étant les coordonnées vectorielles de $\mathfrak{T}$ en M ($\vec{S}$ est son vecteur, $\vec{G}_{\mathrm{M}}$ son moment en M). On dira que $\mathfrak{T}$ est représenté par $\mathrm{T}_{\mathrm{M}}$.

*a.* Démontrer que $|\mathrm{T}_{\mathrm{M}}|$ et $\mathrm{T}_{\mathrm{M}}.\mathrm{T}'_{\mathrm{M}}$ ne dépendent que des torseurs $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ et non du point M. On posera $|\mathrm{T}_{\mathrm{M}}| = |\mathfrak{T}|$ (module du torseur $\mathfrak{T}$) et $\mathrm{T}_{\mathrm{M}}.\mathrm{T}'_{\mathrm{M}} = \mathfrak{T}.\mathfrak{T}'$ (produit scalaire dual des deux torseurs $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$).



.../...

*b.* Démontrer que, $z$ étant un nombre dual donné, le torseur représenté par $z\mathrm{T}_M$ ne dépend pas du point M; on le notera $z\mathcal{T}$.

*c.* Démontrer que le torseur représenté par $\mathrm{T}_M \wedge \mathrm{T}'_M$ ne dépend pas du point M. On le notera $\mathcal{T} \wedge \mathcal{T}'$ (produit vectoriel dual des deux torseurs $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$).

3° *a.* Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les torseurs $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ soient orthogonaux, c'est-à-dire vérifient $\mathcal{T}.\mathcal{T}' = \mathrm{O}_D$.

*b.* Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les torseurs $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ soient parallèles, c'est-à-dire vérifient $\mathcal{T} \wedge \mathcal{T}' = \mathrm{O}_G$.

N.B. — Pour ces deux questions 3° *a.*, et 3° *b.* on envisagera d'abord le cas particulier où l'un au moins des deux torseurs est un couple, puis dans le cas général on raisonnera sur leurs axes centraux.

*c.* Démontrer que, quand il existe, l'axe central de $\mathcal{T} \wedge \mathcal{T}'$ est la perpendiculaire commune aux axes centraux de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$.

*d.* Chacun des deux torseurs étant un glisseur unique, donner une condition nécessaire et suffisante pour que leur produit vectoriel soit un glisseur unique.

*e.* Démontrer que, pour tous torseurs $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ :

$$|\mathcal{T} \wedge \mathcal{T}'|^2 + (\mathcal{T}.\mathcal{T}')^2 = |\mathcal{T}|^2 \, |\mathcal{T}'|^2.$$

4° On pose $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3) = (\mathcal{T}_1 \wedge \mathcal{T}_2).\mathcal{T}_3$ (produit mixte de trois torseurs).

*a.* Soient trois torseurs $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ dont deux au moins ont des axes centraux de directions distinctes. Démontrer que $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3) = 0$ si et seulement si il existe trois nombres duals $z_1, z_2, z_3$ dont l'un au moins est inversible, tels que $z_1\mathcal{T}_1 + z_2\mathcal{T}_2 + z_3\mathcal{T}_3 = 0$.

*b.* Plus généralement montrer que $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3) = 0$ si et seulement si l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée :

— Il existe trois nombres duals $z_1, z_2, z_3$ dont l'un au moins est inversible tels que $z_1\mathcal{T}_1 + z_2\mathcal{T}_2 + z_3\mathcal{T}_3 = 0$.

— Il existe $(x_1, x_2) \in \mathrm{R}^2$ et $(y_1, y_3) \in \mathrm{R}^2$ tels que :

$$\begin{cases} \varepsilon x_1\mathcal{T}_1 + \varepsilon x_2\mathcal{T}_2 = 0 \\ \varepsilon y_1\mathcal{T}_1 + \varepsilon y_3\mathcal{T}_3 = 0 \\ (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ (y_1, y_3) \neq (0, 0) \end{cases}$$

*c.* $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ étant les axes centraux respectivement des trois torseurs $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$, on suppose que deux au moins de ces trois droites ont des directions distinctes. Démontrer que si $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3) = 0$, il existe une droite $\Delta$ perpendiculaire commune aux trois droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ (c'est-à-dire orthogonale à chacune des droites et les rencontrant toutes les trois).





*d.* Soient trois droites de l'espace affine E : $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

On suppose :

$\Delta'_1$ perpendiculaire commune à $\Delta_2$ et $\Delta_3$
$\Delta'_2$ perpendiculaire commune à $\Delta_3$ et $\Delta_1$
$\Delta'_3$ perpendiculaire commune à $\Delta_1$ et $\Delta_2$
$\Delta''_1$ perpendiculaire commune à $\Delta_1$ et $\Delta'_1$
$\Delta''_2$ perpendiculaire commune à $\Delta_2$ et $\Delta'_2$
$\Delta''_3$ perpendiculaire commune à $\Delta_3$ et $\Delta'_3$

Démontrer l'existence d'une droite perpendiculaire commune à $\Delta''_1, \Delta''_2, \Delta''_3$.

*e.* Soient quatre droites de l'espace affine E : $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$

On suppose :

$\Delta'$ perpendiculaire commune à $\Delta_3$ et $\Delta_4$
$\Delta''$ perpendiculaire commune à $\Delta_2$ et $\Delta'$
$\Delta'''$ perpendiculaire commune à $\Delta_1$ et $\Delta''$
$\Delta_5$ perpendiculaire commune à $\Delta_1$ et $\Delta_3$
$\Delta_6$ perpendiculaire commune à $\Delta_1$ et $\Delta_4$

Démontrer qu'il existe une droite perpendiculaire commune à $\Delta'''$, $\Delta_5$ et $\Delta_6$ et qu'il en existe une aussi pour les droites $\Delta'''$, $\Delta_2$ et $\Delta'$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail